Mathematik mit Mathematica

Praktikum im Wintersemester 2021/22 an der TU Braunschweig
betreut von Prof. Dr. Michael Herrmann

Tutorium 02: Lineare Algebra

In[∘]:=
```
Hyperlink[Style["Tutorium Lineare Algebra", Darker[Green]],
 "paclet:tutorial/LinearAlgebraOverview"]
```
Out[∘]=
```
Tutorium Lineare Algebra
```

Grundlagen

In[∘]:=
```
(* eine (m,n)-Matrix ist eine Liste von m Zeilen-Listen,
wobei jede aus n Zahlen besteht *)
mat = {{1, 0, 4}, {2, 3, 4}, {5, 0, 1}, {1, 2, 3}}
 (* 4 Zeilen mit je drei Eilementen*)
```
Out[∘]=
```
{{1, 0, 4}, {2, 3, 4}, {5, 0, 1}, {1, 2, 3}}
```

In[∘]:=
```
(* Ausgabe als Matrix *)
MatrixForm[mat]
```
Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* Eingabe mit Assistent (Menü "Insert" -> "Table/Matrix") *)
```

In[∘]:= mat = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Out[∘]=
```
{{2, 0, 1}, {2, 1, 1}, {2, 0, 0}}
```

In[∘]:=
```
(* Zeilenvektor = 1x3-Matrix, Spaltenvektor = 3x1 -Matrix *)
```

In[∘]:=
```
zv = {{1, 2, 3}};
MatrixForm[zv]
```
Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= sv = {{1}, {2}, {3}};
        MatrixForm[sv]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
In[∘]:= (* Listen werden als Spaltenvektor interpretiert *)
```

```
In[∘]:= MatrixForm[{1, 2, 3}]
        MatrixForm[{{1}, {2}, {3}}]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Operationen

```
In[∘]:= (* Matrizen-Multiplikation : Dimensionen müssen stimmen *)
        (* Matrix mal Spaltenvektor ist ok *)
        Dot[mat, sv]

Out[∘]= {{5}, {7}, {2}}
```

```
In[∘]:= (* Matrix mal Zeilenvektor ist nicht ok *)
        Dot[mat, zv]

        ... Dot: Tensors {{2, 0, 1}, {2, 1, 1}, {2, 0, 0}} and {{1, 2, 3}} have incompatible shapes.

Out[∘]= {{2, 0, 1}, {2, 1, 1}, {2, 0, 0}}.{{1, 2, 3}}
```

```
In[∘]:= (* Zeilenvektor mal Matrix ist auch ok *)
        Dot[zv, mat]

Out[∘]= {{12, 2, 3}}
```

```
In[∘]:= (* Determinante einer quadratischen Matrix *)
        Det[mat]

Out[∘]= -2
```

```
In[∘]:= (* Spur einer quadratischen Matrix = Summe der Diagonaleinträge *)
        Tr[mat]

Out[∘]= 3
```

In[∘]:=
```
(* Potenzen einer Matrix, Variante 1 *)
MatrixForm[Dot[mat, mat]]
MatrixForm[Dot[mat, mat, mat]]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 6 \\ 24 & 1 & 9 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* Achtung: Dot ist nicht "*" *)
```

In[∘]:=
```
MatrixForm[mat * mat]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* Potenzen einer Matrix, Variante 2 *)
MatrixForm[MatrixPower[mat, 2]]
MatrixForm[MatrixPower[mat, 3]]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 6 \\ 24 & 1 & 9 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=

$$\begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{24} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{12} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Out[∘]= {{16, 0, 6}, {24, 1, 9}, {12, 0, 4}}

In[∘]:=
```
(* Achtung: Ergebnis von MatrixForm ist
  eine Ausgabe und kann nicht weiterverarbeiten werden *)
(* folgender Ausdruck hat daher keinen Sinne *)
mat2 = MatrixForm[Dot[mat, mat]]
Tr[mat2]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[∘]= $\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$

In[∘]:=
```
(* richtig wäre *)
mat2 = Dot[mat, mat];
MatrixForm[mat2]
Tr[mat2]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[∘]= 9

Gleichungssysteme

In[∘]:=
```
(* lineares Gleichungssytem; Achtung: LinearSolve findet eine,
aber ggf. nicht alle Lösungen *)
```

In[∘]:= res = LinearSolve$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Out[∘]= {{0}, {0}, {1}}

In[∘]:= MatrixForm[res]

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* Kern einer Matrix *)
```

In[∘]:= NullSpace$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$

Out[∘]= {{-1, 1, 1}}

Inverse Matrix

In[∘]:=
```
(* Invertierung einer quadratischen Matrix *)
Inverse[mat]
```

Out[∘]= $\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{-1, 1, 0\}, \{1, 0, -1\}\right\}$

In[∘]:=
```
(* klappt auch symbolisch (bei kleinen Dimensionen) *)
```

MatrixForm$\left[\text{Inverse}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\right]$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{-b\,c+a\,d} & -\frac{b}{-b\,c+a\,d} \\ -\frac{c}{-b\,c+a\,d} & \frac{a}{-b\,c+a\,d} \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* Matrix muss natürlich invertierbar sein *)
```

In[∘]:=
```
mat0 = (1 0 0
        0 1 0
        0 0 0);
Inverse[mat0]
```

Inverse: Matrix {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}} is singular.

Out[∘]=
```
Inverse[{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}}]
```

In[∘]:=
```
(* Achtung: Rundungsfehler können sehr groß werden; deshalb sollte
 der Befehl Inverse nicht mit Gleitkommazahlen verwendet werden *)
mat1 = (1 0 0
        0 1 0
        0 0 0.00000001);
mat2 = (1 0 0
        0 1 0
        0 0 -0.00000001);
Norm[Inverse[mat1] - Inverse[mat2]]
```

Out[∘]= $2. \times 10^{8}$

Matrix-Exponential und Lineare Differentialgleichungen

Das Matrixexponential (einer quadratischen Matrix) ist als Reihe definiert (die immer konvergiert)
:

$$\exp(M) = Id + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \frac{M^4}{4!} + ..$$

Damit kann man lineare Differentialgleichungssysteme lösen :

$$x[t] = \exp[t\,A]\;\; x[0]$$

$$\frac{d}{dt} x[t] = A\, x[t]$$

In[∘]:=
```
mat = (1 1 1
       2 1 0
       1 0 1);
mate = MatrixExp[t * mat];
MatrixForm[mate]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{t-\sqrt{3}\,t}}{(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{e^{t+\sqrt{3}\,t}}{(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & -\frac{e^{t-\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{e^{t+\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & -\frac{e^{t-\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(\cdots} \\ -\frac{2\,e^{t-\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{2\,e^{t+\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & \frac{e^{t}}{3} + \frac{2\,e^{t-\sqrt{3}\,t}}{3\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{2\,e^{t+\sqrt{3}\,t}}{3\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & -\frac{2\,e^{t}}{3} + \frac{2\,e^{\cdots}}{3\,(-1+\sqrt{\cdots}} \\ -\frac{e^{t-\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{e^{t+\sqrt{3}\,t}}{\sqrt{3}\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & -\frac{e^{t}}{3} + \frac{e^{t-\sqrt{3}\,t}}{3\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} + \frac{e^{t+\sqrt{3}\,t}}{3\,(-1+\sqrt{3})\,(1+\sqrt{3})} & \frac{2\,e^{t}}{3} + \frac{e^{t-\cdots}}{3\,(-1+\sqrt{3}\cdots} \end{pmatrix}$$

Spektrale Eigenschaften quadratischer Matrizen

Eigenwerte und Eigenvektoren

In[∘]:=
```
mat = (2 0 1; 2 1 1; 2 0 0);
```
$$\text{mat} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

In[∘]:=
```
(* Eigenwerte der Matrix *)
evals = Eigenvalues[mat]
```
Out[∘]= $\{1+\sqrt{3},\ 1,\ 1-\sqrt{3}\}$

In[∘]:=
```
(* Eigenvektoren der Matrix : Liste von Spaltenvektoren *)
evects = Eigenvectors[mat]
```
Out[∘]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{3}\right),\ 1\right\},\ \{0,\ 1,\ 0\},\ \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{3}\left(3-2\sqrt{3}\right),\ 1\right\}\right\}$

In[∘]:=
```
MatrixForm[evects[[1]]]
MatrixForm[evects[[2]]]
MatrixForm[evects[[3]]]
```
Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Out[∘]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) \\ \frac{1}{3}\left(3-2\sqrt{3}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
(* alternativ: berechne die Nullstellen des Characteristischen Polynoms *)
pol = CharacteristicPolynomial[mat, la]
```
Out[∘]= $-2+3\,\text{la}^2-\text{la}^3$

In[∘]:=
```
la /. Solve[pol == 0, la] (* siehe auch 3. Tutorium zum Lösen von Gleichungen *)
```
Out[∘]= $\{1,\ 1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}\}$

In[∘]:=
```
(* Bemerkung: Satz von Cayley-Hamilton kann nachgerechnet werden *)
-2 MatrixPower[mat, 0] + 3 MatrixPower[mat, 2] - MatrixPower[mat, 3]
```
Out[∘]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

Jordansche Normalform

In[•]:=

```
(* Beispiel diagonalisierbare Matrix *)
mat = {{2, 0, 1}, {3, 1, 1}, {2, 0, 0}};
(* berechne Matrix für Basiswechsel
 (smat) sowie die Jordansche Normalform (jmat) *)
{smat, jmat} = JordanDecomposition[mat];
MatrixForm[smat]
MatrixForm[jmat]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \\ 1 & \frac{1}{6}\left(9-5\sqrt{3}\right) & \frac{1}{6}\left(9+5\sqrt{3}\right) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

In[•]:=

```
(* test *)
Simplify[mat - Dot[smat, jmat, Inverse[smat]]]
```

Out[•]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[•]:=

```
(* Beispiel nicht-diagonalisierbare Matrix *)
mat = {{2, 0, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}};
{smat, jmat} = JordanDecomposition[mat];
MatrixForm[smat]
MatrixForm[jmat]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$