

Mathematik mit Mathematica

Praktikum im Wintersemester 2021/22 an der TU Braunschweig
betreut von Prof. Dr. Michael Herrmann

Lösungen Serie 02

Aufgabe 1

In[]:= (* definiere Matrizen und Vektoren *)

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$b3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

In[]:= (* löse 1. Gleichung *)

```
sol1 = LinearSolve[A1, b1]
```

```
MatrixForm[sol1]
```

$$\text{Out[]} = \left\{ \left\{ \frac{3}{5} \right\}, \left\{ \frac{1}{5} \right\}, \left\{ \frac{6}{5} \right\} \right\}$$

Out[]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= (* diese Lösung ist eindeutig, weil A1 wegen det(A1) <> 0 invertierbar ist *)
Det[A1]
NullSpace[A1]
```

```
Out[ ]:= 5
```

```
Out[ ]:= {}
```

```
In[ ]:= (* löse 2. Gleichung *)
sol2 = LinearSolve[A2, b2]
MatrixForm[sol2]
```

```
Out[ ]:= {{1}, {2}, {0}}
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= (* diese Lösung ist nicht eindeutig,
weil A2 wegen det(A2)=0 einen Kern besitzt *)
Det[A2]
NullSpace[A2]
```

```
Out[ ]:= 0
```

```
Out[ ]:= {{1, -3, 1}}
```

```
In[ ]:= (* löse 3. Gleichung *)
sol3 = LinearSolve[A3, b3]
MatrixForm[sol3]
```

```
Out[ ]:= {{1}, {-1}, {0}}
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= (* diese Lösung ist auch nicht eindeutig,
weil A3 wieder einen Kern besitzt; A3 besitzt aber keine Determinante *)
Det[A3]
NullSpace[A3]
```

```
... Det: Argument {{0, 1, 2}, {2, 0, 2}} at position 1 is not a non-empty square matrix.
```

```
Out[ ]:= Det[{{0, 1, 2}, {2, 0, 2}}]
```

```
Out[ ]:= {{-1, -2, 1}}
```

Aufgabe 2

In[]:= (* definiere die Matrix *)

```
In[ ]:= mat = 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

Out[]:= {{1, 2, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {0, 1, 3, 0}, {1, 0, 0, 1}}

In[]:= (* berechne die Eigenwerte *)

```
{la1, la2, la3, la4} = Eigenvalues[mat]
```

Out[]:= {3, 3, -1, 1}

In[]:= (* berechne die Eigenvektoren *)

```
ev1 = Eigenvectors[mat][[1]]
```

```
ev2 = Eigenvectors[mat][[2]]
```

```
ev3 = Eigenvectors[mat][[3]]
```

```
ev4 = Eigenvectors[mat][[4]]
```

Out[]:= {0, 0, 1, 0}

Out[]:= {0, 0, 0, 0}

Out[]:= {-4, 4, -1, 2}

Out[]:= {0, 0, 0, 1}

In[]:= (* test *)

```
Dot[mat, ev1] - la1 * ev1
```

```
Dot[mat, ev2] - la2 * ev2
```

```
Dot[mat, ev3] - la3 * ev3
```

```
Dot[mat, ev4] - la4 * ev4
```

Out[]:= {0, 0, 0, 0}

Out[]:= {0, 0, 0, 0}

Out[]:= {0, 0, 0, 0}

Out[]:= {0, 0, 0, 0}

Aufgabe 3

```
In[ ]:= (* erzeuge quadratische Zufallsmatrix mit reellen Einträgen *)
```

```
dim = 8;
```

```
mat =
```

```
  RandomReal[
```

```
    {-2, 2}, (* untere und obere Schranke für Zufallszahl *)
```

```
    {dim, dim} (* Matrix-Dimension *)
```

```
  ];
```

```
MatrixForm[mat]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

```

  1.24117  0.889263  1.23326  1.67439  -1.15476  1.59537  -0.0890915  1.5
 -1.05662 -0.924042 -1.87335 -1.46835 -0.111516  1.13353  0.493371  -1.6
  1.06043  0.0324084 -0.521886  0.0837757  0.89331  -1.90046  0.475421  -1.
  1.44101  -0.341787  0.0760948  0.989227  -0.907316  -0.59487  1.54056  -1.1
 -1.35245  0.160587  1.55357  0.506688  1.64449  -0.368106  1.10696  -1.
 -0.911156  0.923345  1.33649  -1.94739  0.927414  1.48284  0.965391  0.61
 -0.93166  1.21774  -1.94325  -0.19661  -1.39898  1.59935  -0.980353  0.7
  1.37764  -0.0811662  1.29166  0.75828  1.46662  0.865363  -1.28756  1.9

```

```
In[ ]:= (* berechne alle (komplexen) Eigenwerte *)
```

```
ev = Eigenvalues[mat]
```

```
Out[ ]:= {1.96628 + 2.81598 i, 1.96628 - 2.81598 i, 2.99395 + 1.22174 i, 2.99395 - 1.22174 i,
  -2.49908 + 0. i, -1.27401 + 1.21002 i, -1.27401 - 1.21002 i, 0.0464774 + 0. i}
```

```
In[ ]:= (* konvertiere die komplexen Eigenwerte in Punkte *)
```

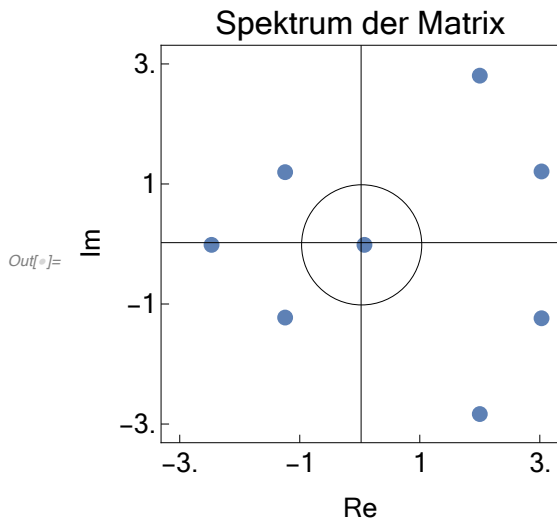
```
pnts = ReIm[ev]
```

```
Out[ ]:= {{1.96628, 2.81598}, {1.96628, -2.81598}, {2.99395, 1.22174}, {2.99395, -1.22174},
  {-2.49908, 0.}, {-1.27401, 1.21002}, {-1.27401, -1.21002}, {0.0464774, 0.}}
```

```

In[ ]:= (* plotte die Punkte *)
prn = Round[Max[Abs[pnts]], .1]; (* Plot-Parameter *)
ListPlot[
  pnts, (* Liste der Punkte *)
  PlotRange → {{-1.1 prn, 1.1 prn}, {-1.1 prn, 1.1 prn}}, (* Plot-Bereich *)
  (* weitere Optionen *)
  PlotStyle → {PointSize[0.04]},
  PlotLabel → "Spektrum der Matrix",
  AspectRatio → 1,
  BaseStyle → {FontFamily -> "Microsoft Sans Serif", FontSize -> 14},
  ImageSize → 72 × 3.5,
  Frame → True,
  FrameTicks → {{{-prn, prn, -1, 1}, None}, {{-prn, prn, -1, 1}, None}},
  FrameLabel → {"Im", None}, {"Re", None}},
  Epilog → Circle[{0, 0}, 1]
]

```



Aufgabe 4

In[]:= (* einige Definitionen *)

$$\text{mat1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{mat2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{mat3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{mat4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{rhs} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

In[]:= (* berechne die Matrix-Exponentiale *)

expmat1 = MatrixExp[t * mat1];

expmat2 = MatrixExp[t * mat2];

expmat3 = MatrixExp[t * mat3];

expmat4 = MatrixExp[t * mat4];

MatrixForm[expmat1]

MatrixForm[expmat2]

MatrixForm[expmat3]

MatrixForm[expmat4]

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & -\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} \\ -\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2} \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t] & \text{Sin}[t] \\ -\text{Sin}[t] & \text{Cos}[t] \end{pmatrix}$$

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} e^t & e^t t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

In[]:= (* berechne die Lösungen der Anfangswertprobleme;

jede Lösung enthält 2 Ausdrücke in der Variablen t *)

sol1 = Dot[expmat1, rhs];

sol2 = Dot[expmat2, rhs];

sol3 = Dot[expmat3, rhs];

sol4 = Dot[expmat4, rhs];

In[]:= (* plote die Lösungen *)

```
Plot[{sol1[[1]], sol1[[2]]}, {t, 0, 2}, ImageSize -> Small]
```

```
Plot[{sol2[[1]], sol2[[2]]}, {t, 0, 2}, ImageSize -> Small]
```

```
Plot[{sol3[[1]], sol3[[2]]}, {t, 0, 2}, ImageSize -> Small]
```

```
Plot[{sol4[[1]], sol4[[2]]}, {t, 0, 2}, ImageSize -> Small]
```

